DM Facultatif pour Vendredi 28/11
Techniques pour trouver A^n

<u>Exercice 1</u> *Le binôme de Newton*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $A^2 = 3A - 2I_2$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$.

2. Soit $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = C - 2I_3$.

a. Calculer D^2.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, C^n = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} D$.

<u>Exercice 2</u> *La diagonalisation*

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.

1. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$. Puis exprimer U_n en fonction de n.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible et donner P^{-1}.

b. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. En déduire l'expression de U_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.